الجامعة اللبنانية
كلية العلوم الاقتصادية
وادارة الاعمال

مباراة دخول
للعام : ٢٠١٧-٢٠١٨
فرع الإقتصاد

السبت في ١٥ تموز ٢٠١٧

عدد المسائل: اربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de personnes âgées de 64 ans ou plus dans une certaine ville.

	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
x_i : rang de l'année	0	5	10	15	20	25	30
y_i : nombre de personnes en milliers au 1er janvier de chaque année	210	230	290	360	420	490	560

On choisit un repère orthogonal ayant comme unités graphiques : 1 cm pour 5 années sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 000 personnes sur l'axe des ordonnées.

1) a- Trouver les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.
   b- Déterminer une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$ de cette série. (Donner les valeurs de a et b à 10^{-2} près).
   c- Représenter le nuage des points $(x_i ; y_i)$, le point G et tracer la droite $(D_{y/x})$.
2) Calculer le coefficient de corrélation de cette série. Interpréter le résultat obtenu.
3) Supposant que le modèle précédent reste valable jusqu'à l'année 2040.
   a- Estimer le nombre de personnes âgées de 64 ans ou plus en l'année 2025 dans cette ville.
   b- Déterminer l'année à partir de laquelle, le nombre de personnes âgées de 64 ans ou plus dépassera pour la première fois 780 000 dans cette ville.

II- (4 points)

Un restaurant propose à ses clients la formule suivante: un plat du jour et le choix d'un dessert (une tarte ou une glace) avec ou sans café.
Un client peut choisir une tarte ou une glace. Il peut ne rien choisir mais jamais les deux à la fois.
On a remarqué que :

50% des clients prennent une glace.
30% des clients prennent une tarte.
20% des clients ne prennent pas de dessert.
Parmi les clients ayant pris une glace, 80% prennent un café.
Parmi les clients ayant pris une tarte, 60% prennent un café.
Parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90% prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On considère les événements suivants :

G : « le client prend une glace » T : « le client prend une tarte »
N : « le client ne prend pas de dessert » C : « le client prend un café »

1) a- Calculer les probabilités $P(G \cap C)$ et $P(T \cap C)$.
   b- Vérifier que $P(C) = 0,76$.
2) a- Vérifier que $P(\overline{C} \cap \overline{G}) = 0,14$.
   b- Sachant que le client n'a pas pris un café, calculer la probabilité qu'il ne prenne pas une glace.
3) Une glace est vendue à 4 000 LL, une tarte à 4 000 LL et un café à 3 000 LL.
   Chaque client prend un plat et un seul au prix unique de 18 000 LL.
   Soit X la variable aléatoire égale à la somme payée en LL par un client dans ce restaurant.
   a- Vérifier que les quatre valeurs possibles de X sont : 18 000 ; 21 000 ; 22 000 et 25 000.
   b- Démontrer que $P(X = 22000) = 0,22$ et calculer $P(X = 25000)$.

III- (4 points)

Le premier janvier 2015, Nadim dépose dans une banque une somme de *x* LL à un taux d'intérêts annuel de 6% avec capitalisation annuelle des intérêts. De plus, au premier janvier des années suivantes et après la capitalisation des intérêts, Nadim ajoute sur ce compte la somme de 1 800 000 LL. On pose $U_0 = x$ et pour tout entier naturel n, on appelle U_n le montant de ce compte, le premier janvier de l'année (2015 + n).

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = 1,06U_n + 1\,800\,000$.
2) On pose $V_n = U_n + 30\,000\,000$ pour tout entier naturel n.
   a- Vérifier que la suite (V_n) est géométrique dont on déterminera la raison. Exprimer son premier terme en fonction de *x*.
   b- Exprimer U_n en fonction de *x* et de n.
3) Calculer la valeur de *x* pour que ce compte atteigne 197 245 852,8 LL le premier janvier 2019.

IV- (8 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - 2\ln x$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).
   b- Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement deux racines 1 et α. Vérifier que $3,5 < \alpha < 3,52$.
4) Calculer f(5) et f(7) puis construire (C).

Partie B

Une usine fabrique un détergent liquide. Sa production journalière est comprise entre 25 et 500 litres. On suppose que toute la production est vendue.
Dans ce qui suit, les coûts et les recettes sont exprimés en cent milliers LL.
On désigne par x, exprimé en centaines de litres, la quantité journalière produite et on définit le coût total de production C par $C(x) = x^2 - 2x\ln x$ où $x \in [0,25 ; 5]$.
On suppose que le prix de vente d'un litre est de **1000 LL**.

1) Calculer en LL, le coût de production de 100 litres de ce détergent.
2) a- Exprimer, en fonction de x, le revenu R(x).
   b- Justifier que le profit réalisé par l'usine pour x centaines de litre vendus, est donné par $P(x) = -x\, f(x)$.
3) a- Si la production journalière dépasse 360 litres, l'usine réalise-t-elle un bénéfice? Justifier.
   b- Pour quelle production en litre, le profit passe-t-il du négatif au positif ?
   Interpréter économiquement la valeur obtenue.