الجامعة اللبنانية
كلية العلوم الاقتصادية
وإدارة الأعمال

مباراة دخول - اقتصاد

السبت ٢١ تموز ٢٠١٨

مسابقة في مادة الرياضيات — الاسم:
المدة: ساعتان — الرقم:

I- (4 points)

Une usine fabrique et vend des pièces électroniques. Le profit annuel est donné par le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Profit en millions LL y_i	62	73	100	102	120	135

1) Trouver les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i;\ y_i)$.
2) Déterminer une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$.
3) Trouver le coefficient de corrélation r et interpréter le résultat obtenu.
4) Calculer le pourcentage d'augmentation du profit annuel de 2007 à 2010.
5) On suppose que le modèle d'ajustement précédent reste valable pour vingt ans. Estimer le profit annuel en 2014.
6) Un deuxième modèle d'ajustement est donné par $y = 10(2x + \ln x)$.
   Si en réalité, le profit annuel en 2014 est 30% plus grand que celui en 2011, quel est alors le meilleur modèle d'ajustement? Justifier.

II- (4 points)

On considère 3 urnes U, V et W. L'urne U contient 3 boules rouges et 2 boules noires, l'urne V contient 2 boules rouges et 3 boules noires et l'urne W contient 3 boules rouges et 3 boules noires.

Partie A

Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule de U : Si elle est rouge, on la met dans V et si elle est noire on la met dans W **et à la fin** on tire deux boules: une de V et une de W.

On considère les deux évènements suivants:

- R : « la boule tirée de U est rouge »
- C : « la boule tirée de V est rouge et celle tirée de W est aussi rouge »

1) Calculer les probabilités $P(R)$ et $P\left(C/R\right)$ et vérifier que $P(C \cap R) = \frac{3}{20}$.
2) Vérifier que $P(C) = \frac{153}{700}$ puis calculer $P\left(\overline{R}/C\right)$.

Partie B

Dans cette partie on met toutes les boules des trois urnes U, V et W dans une même urne T puis on tire au hasard et simultanément trois boules de T.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

1) Calculer $P(X=0)$ et $P(X \le 1)$.
2) Calculer $P\left(X \le 2 / X \ge 1\right)$.

III- (4 points)

A une certaine date, Fadi a déposé dans une banque une somme de 20 000 000 LL à un taux d'intérêt annuel de 9 % avec capitalisation mensuelle des intérêts. Chaque mois, et après capitalisation des intérêts, Fadi retire 300 000 LL pour payer le loyer.

Pour tout entier $n \ge 0$, on note u_n la somme que Fadi possède dans cette banque après n mois.

Ainsi $u_0 = 20000000$.

1) Calculer u_1 puis vérifier que $u_{n+1} = 1,0075u_n - 300000$.
2) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \ge 0$ par $v_n = u_n - 40000000$.
   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,0075 puis déterminer le premier terme v_0.
   b- Montrer que $u_n = 20\,000\,000 \times \left[2 - (1,0075)^n\right]$.
   c- Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3) Le taux d'intérêt annuel de 9% proposé par la banque n'est pas suffisant à Fadi pour payer le loyer pour 8 ans. Quelle somme d'argent lui manque-t-il? Justifier.

IV- (8 points)

Partie A- Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + 3$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Soit (Δ) la droite d'équation $y = 2$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Calculer f(1) et f(1,5).
2) Montrer que $f'(x) = (e^x - 1)^2$ et dresser le tableau de variations de f.
3) a- Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α.
   b- Montrer que $\alpha \in]0,8\ ;\ 0,9[$.
4) Tracer (Δ) et (C).
5) Calculer, en fonction de α, l'aire du domaine limité par (C), (Δ) et l'axe des ordonnées.

Partie B- Dans ce qui suit, on suppose $\alpha = 0,897$.

Une usine produit des jouets, le coût total de production est modélisé par

$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + 3$ (où x en milliers de jouets et $f(x)$ en millions LL) $x \in [0;100]$

1) Déterminer le nombre de jouets pour lequel le coût total est égal à 2 000 000 LL.
2) Le revenu, en millions LL, est exprimé par $R(x) = x$.
   (On suppose que toute la production est vendue).
   a- Calculer le prix en LL d'un seul jouet.
   b- Démontrer que le profit, en millions LL, est exprimé par $P(x) = -\frac{1}{2}\left[(e^x - 2)^2 + 2\right]$
   puis déduire que l'usine est en perte pour toute production.
3) Déterminer le niveau de production qui rend la perte minimale.