

عدد المسائل: أربع
مسابقة في مادة الرياضيات
الاسم:
الرقم:
المدة: ساعتان

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة أو اختزان المعلومات أو رسم البيانات.
- يستطيع المرشح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Écrire le numéro de chaque question et donner, en justifiant, la réponse qui lui correspond.

N°	Question	A	B	C
1	Une boîte contient 60 bouteilles de jus. 10% des bouteilles sont de jus d'orange. 4 bouteilles de jus sont choisies au hasard et simultanément. De combien de façons peut-on obtenir 3 bouteilles de jus d'orange parmi les 4 bouteilles déjà choisies?	3422	1080	20
2	Chaque semaine, Jad arrive en retard à l'école deux jours sur cinq et Jana arrive en retard à l'école un jour sur cinq. En un jour donné, quelle est la probabilité que Jad arrive en retard à l'école et que Jana arrive à temps ?	0,08	0,12	0,32
3	(C) et (G) sont respectivement les courbes représentatives de deux fonctions f et g qui sont définies sur \mathbb{R} , par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 8$. L'aire de la partie hachurée est exprimée par	$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} (f(x) - g(x)) dx$	$\int_{-2}^2 (g(x) - f(x)) dx$	$\int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx$
4	Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .	$a = 3$ et $b = 0,15$	$a = 0,1$ et $b = 0,15$	$a = 0,15$ et $b = 0,1$

II- (4 points)

Une revue électronique scientifique est lancée en 2015 et elle est uniquement consultée par abonnement.

En 2015, cette revue compte 5 000 abonnés.

Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent plus leurs abonnements et il y a 300 nouveaux abonnés qui s'inscrivent.

Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par U_n le nombre d'abonnés pour l'année $(2015 + n)$.

On a donc, $U_0 = 5 000$ et $U_{n+1} = 0,8U_n + 300$.

1) a- Calculer U_1 .

b- Pour un nouveau abonné, les frais d'abonnement annuels sont de 100 000 LL.

Cependant, une réduction de 10 % est accordée sur les frais d'abonnement pour les anciens abonnés.

Calculer le revenu total de cette revue réalisé par les frais d'inscriptions en 2016.

2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1500$ pour tout $n \geq 0$.

a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b- Vérifier que $U_n = 3500 \times 0,8^n + 1500$.

c- Montrer que (U_n) est une suite strictement décroissante.

d- A partir de quelle année, le nombre d'abonnés devient plus petit que 2 000? Justifier.

III- (4 points)

On considère deux urnes U et V .

• L'urne U contient deux boules rouges et trois boules vertes.

• L'urne V contient quatre boules rouges et six boules vertes.

Partie A

On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V .

1) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.

2) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de couleurs différentes.

Partie B

On lance un dé parfait dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

• Si le numéro obtenu est 1 ou 6, on tire alors au hasard et simultanément 2 boules de l'urne U ;

• sinon, on tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne V .

On considère les événements suivants :

E : « le numéro obtenu est 1 ou 6 ».

F : « les deux boules tirées sont rouges ».

1) a- Calculer la probabilité $P\left(\frac{F}{E}\right)$ et déduire que $P(E \cap F) = \frac{1}{30}$.

b- Calculer $P(F)$.

2) Les deux boules tirées sont rouges.

Calculer la probabilité que ni le numéro 1, ni le numéro 6 soient obtenus.

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

a- Vérifier que $P(X = 0) = \frac{29}{90}$.

b- Déterminer la loi de probabilité de X .

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $f(x) = 3 - xe^{1-x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et calculer $f(-1)$.

2) a- Démontrer que la droite (d) d'équation $y = 3$ est une asymptote à (C).

b- Etudier, suivant les valeurs de x , la position relative de (C) et (d).

3) Vérifier que $f'(x) = (x-1)e^{1-x}$ et dresser le tableau de variations de f .

4) La droite (D) d'équation $y = 2,5$ coupe (C) en deux points d'abscisses α et β tel que $0,22 < \alpha < 0,24$.

Montrer que $2,67 < \beta < 2,69$.

5) Tracer (C), (d) et (D).

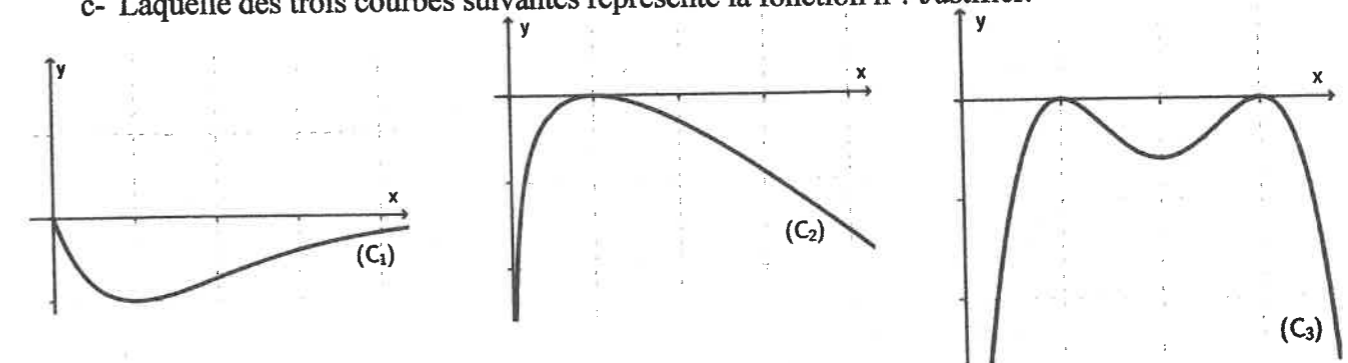
6) Calculer l'aire du domaine limité par (C), (d) et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

7) On considère la fonction h définie par $h(x) = \ln(3 - f(x))$.

a- Vérifier que le domaine de définition de h est $]0; +\infty[$.

b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$. Calculer $h(1)$.

c- Laquelle des trois courbes suivantes représente la fonction h ? Justifier.



d- Résoudre l'équation $h(x) = -\ln 2$ puis résoudre l'inéquation $h(x) > -\ln 2$.