الجامعة اللبنانية
كلية العلوم الاقتصادية
وإدارة الأعمال

مباراة دخول
إقتصاد

السبت ٢٠ تموز ٢٠١٩

عدد المسائل: أربع

مسابقة في مادة الرياضيات
المدة: ساعتان

الاسم:
الرقم:

ملاحظة: - يسمح باستعمال آلة حاسبة غير قابلة للبرمجة او اختزان المعلومات او رسم البيانات.
- يستطيع المرشّح الإجابة بالترتيب الذي يناسبه (دون الالتزام بترتيب المسائل الواردة في المسابقة).

I- (4 points)

Une étude est menée sur le nombre d'habitants d'un village.
Le tableau suivant donne le nombre d'habitants de ce village (en milliers) au 1er janvier de chaque année entre 2010 et 2015.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang de l'année: x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre des habitants (en milliers): y_i	10,5	11,5	12,9	14,5	15,4	16,9

1) Calculer le coefficient de corrélation r et interpréter la valeur obtenue.
2) Déterminer une équation de la droite de régression $(D_{y/x})$ de y en fonction de x.
3) Calculer le pourcentage d'augmentation du nombre d'habitants entre 2010 et 2015.
4) On suppose que le modèle précédent reste valable durant la période entre 2010 et 2025.
   a- Le nombre d'habitants de ce village dépasse-t-il 30 000, en une certaine année, durant cette période ? Justifier.
   b- Le nombre d'appartements de ce village est 5 000 et chacun d'eux peut contenir en moyenne 5 personnes. En quelle année les appartements de ce village ne pourront plus contenir les habitants de ce village pour la première fois ? Justifier.

II- (4 points)

On considère deux urnes U et V.

- L'urne U contient deux boules rouges et trois boules vertes.
- L'urne V contient quatre boules rouges et six boules vertes.

Partie A

On tire au hasard une boule de l'urne U et une boule de l'urne V.
1) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient rouges.
2) Calculer la probabilité que les deux boules tirées soient de couleurs différentes.

Partie B

On lance un dé parfait dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

- Si le numéro obtenu est 1 ou 6, on tire alors au hasard et simultanément 2 boules de l'urne U ;
- sinon, on tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne V.

On considère les évènements suivants :
E : « le numéro obtenu est 1 ou 6 ».
F : « les deux boules tirées sont rouges ».

1) a- Calculer la probabilité $P\left(F/E\right)$ et déduire que $P(E\cap F)=\frac{1}{30}$.
   b- Calculer P(F).
2) Les deux boules tirées sont rouges.
   Calculer la probabilité que ni le numéro 1, ni le numéro 6 soient obtenus.
3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
   a- Vérifier que $P(X = 0) = \frac{29}{90}$.
   b- Déterminer la loi de probabilité de X.

III- (4 points)

Une revue électronique scientifique est lancée en 2015 et elle est uniquement consultée par abonnement.
En 2015, cette revue compte 5 000 abonnés.
Chaque année, 20 % des abonnés ne renouvellent plus leurs abonnements et il y a 300 nouveaux abonnés qui s'inscrivent.
Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par U_n le nombre d'abonnés pour l'année (2015 + n).
On a donc, $U_0 = 5\,000$ et $U_{n+1} = 0{,}8U_n + 300$.
1) a- Calculer U_1.
   b- Pour un nouveau abonné, les frais d'abonnement annuels sont de 100 000 LL.
   Cependant, une réduction de 10 % est accordée sur les frais d'abonnement pour les anciens abonnés.
   Calculer le revenu total de cette revue réalisé par les frais d'inscriptions en 2016.
2) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1500$ pour tout $n \geq 0$.
   a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b- Vérifier que $U_n = 3500 \times 0{,}8^n + 1500$.
   c- Montrer que (U_n) est une suite strictement décroissante.
   d- A partir de quelle année, le nombre d'abonnés devient plus petit que 2 000? Justifier.

IV- (8 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)= 3-xe^{1-x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1) a- Montrer que la droite (d) d'équation y = 3 est asymptote à (C).
   b- Montrer que, pour tout x > 0, (C) est en dessous de (d).
2) Vérifier que $f'(x)=(x-1)e^{1-x}$ et dresser le tableau de variation de f.
3) La droite (D) d'équation y = 2,5 coupe (C) en deux points d'abscisses α et β tel que $0{,}22 < \alpha < 0{,}24$.
   Montrer que $2{,}67 < \beta < 2{,}69$.
4) Tracer (C), (d) et (D).

Partie B

Dans ce qui suit α = 0,23 et β = 2,68.

Dans une compagnie qui produit et vend des montres, le coût moyen de production, en millions LL, est modélisé par $C_M(x)=3-xe^{1-x}$ où x est le nombre des montres produites, en centaines, avec $0 < x \leq 4$.
1) Calculer $C_M(2)$ et donner une interprétation économique à la valeur obtenue.
2) On désigne par $C_T(x)$ le coût total de production en millions LL.
   Exprimer $C_T(x)$ en fonction de x.
3) Déterminer graphiquement le nombre des montres à produire pour avoir un coût moyen minimal.
4) Chaque montre est vendue à 31 250 LL et seulement 80 % de la production est vendue.
   a- Montrer que le profit P(x), en millions LL, est modélisé par $P(x)=x[2{,}5-C_M(x)]$.
   b- Déterminer le nombre des montres vendues pour que cette compagnie réalise un gain.
   c- Le profit moyen $\frac{P(x)}{x}$, en millions LL, est noté par $P_M(x)$.
   Montrer que $P_M(x)$ est maximal pour $x=1$ et calculer ce maximum. Donner une interprétation économique du résultat obtenu.