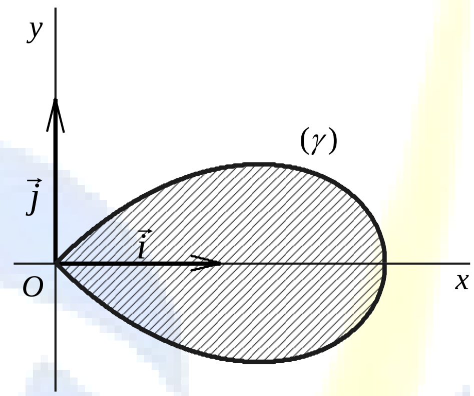
Concours d'entrée 2019 - 2020 — ***<u>Mathématiques</u>*** — ***Durée : 3 heures***
La distribution des notes est sur 50 — ***Bac. Libanais*** — ***Juillet , 2019***

<u>*Exercice 1*</u> (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé .
On considère la courbe (γ) d'équation $x^3-2x^2+xy^2+2y^2=0$.

1- a) Montrer que l'équation de (γ) est équivalente à
$y^2(2+x)=x^2(2-x)$.
En déduire que l'ensemble des abscisses des points de (γ) est l'intervalle $I=]-2\ ;\ 2]$.

b) Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de (γ) .



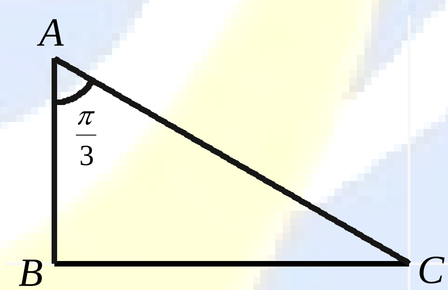
2- La figure ci-contre montre la partie de (γ) dans $[0\ ;\ 2]$, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

a) Vérifier que $y^2=-x^2+4x-8+\dfrac{16}{x+2}$.

b) Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine hachuré limité par (γ) autour de l'axe des abscisses .

c) Si $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$, déterminer V en cm^3 .

<u>*Exercice 2*</u> (10 points)



On considère dans un plan orienté, un triangle ABC rectangle en B ,
tel que $AB=4$ et $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{3}\ \ (2\pi)$.

Soit I et E les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

1- Soit S la similitude telle que $S(A)=C$ et $S(C)=B$.
Déterminer le rapport et un angle de S .

2- a) Justifier l'existence d'une rotation R qui transforme A en E et B en C .
b) Déterminer un angle de R et construire , <u>avec justification</u> , son center O .

3- a) Déterminer $R\circ S(C)$ et $S\circ R(B)$.
b) Déterminer le centre ,le rapport et un angle de chacune des similitudes $R\circ S$ et $S\circ R$.

4- Soit M et M' les points définis par $\overrightarrow{AM}=k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'}=k\,\overrightarrow{EC}$ où k est un nombre réel .
Montrer que $M'=R(M)$. En déduire la nature du triangle OMM' .

5- Soit (Γ) le cercle de centre N circonscrit au triangle OMM' .
a) Montrer que le point A appartient à (Γ) .
b) Montrer que N est l'image de M par une similitude f de centre O dont on déterminera le rapport et un angle .

c) Montrer que $f(B)=E$ et déterminer $f(A)$.

d) Déterminer l'ensemble (δ) de N lorsque k décrit IR. Tracer (δ) .

Exercice 3 (8 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u}\ ,\vec{v})$.
A tout point M d'affixe z , on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' telles que $z'=z-2$ et $z''=z^2-z$.

1- Soit $z=x+iy$ où x et y sont deux nombres réels .

a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z' et z'' en fonction de x et y.

b) Déterminer les points M pour lesquels les deux points M' et M'' appartiennent à l'axe des ordonnées .

2- a) Vérifier que $z'\neq z$ et déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{z''-z}{z'-z}$ en fonction de x et y.

b) Déduire l'ensemble des points M du plan pour lesquels les points M , M' et M'' sont alignés .

c) Déterminer l'ensemble des points M qui appartiennent au cercle de diamètre $[M'M'']$.

3- Soit (H) la courbe d'équation $x^2-y^2-2x=0$.

a) Montrer que (H) est une hyperbole équilatère dont on déterminera le centre , les sommets et les équations des asymptotes .

b) $P(\alpha\ ;\ \beta)$ est un point de (H) tel que $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{OP})=\theta\ \ (2\pi)$ où $0\leq\theta<\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que $OP=\dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}$. Déterminer θ , α et β lorsque $OP=2\sqrt{3}$.

Exercice 4 (7 points)

Une urne contient trois dés équilibrés ; deux d'entre eux sont bleus et possède chacun six faces numérotées de 1 à 6 alors que le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6 .

1- On tire au hasard un dé de l'urne et on le lance . On considère les événements suivants :
B : " le dé tiré est bleu " ; R : " le dé tiré est rouge " et S : " on obtient 6 au lancer du dé ".

Démontrer que $p(S)=\dfrac{1}{3}$.

2- Dans cette partie , on tire au hasard un dé de l'urne . On lance ensuite ce dé n fois de suite .
On note S_n l'événement : " on obtient 6 à chacun des n lancers " .

a) Calculer la probabilité de l'événement " le dé tiré est bleu et on a obtenu 6 à chacun des n lancers " .

b) Démontrer que $p(S_n)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ et justifier la valeur de $p(S)$ obtenue en 1.

c) Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers . Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

d) Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $p_n \geq 0{,}999$.

Exercice 5 (7 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+2\ell n\, x}{x^2}$.

1- Le tableau de variations ci-dessous est celui de la fonction g définie sur $[2\ ;+\infty[$ par $g(x) = x - 1 - 2\ell n\, x$.

x	2		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	$1-\ell n 4$	$\nearrow$	$+\infty$

a) Calculer $g(3)$ et $g(4)$ puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une racine unique α appartenant à l'intervalle $]3\ ;\ 4[$.

b) Calculer $f(x) - \dfrac{1}{x}$ en fonction de $g(x)$ et montrer que , pour tout $x \geq 4,\ 0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$. (1)

2- On considère la suite (I_n) définie , pour $n \geq 1$, par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) En utilisant l'inégalité (1), montrer que , pour tout entier naturel $n \geq 4$, $0 < I_n < \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

3- Soit $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots\cdots + I_n$.

a) En utilisant une intégration par parties , montrer que $\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{3+2\ell n\, x}{x} + C$. (C est une constante)

b) Calculer S_n en fonction de n .

c) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (12 points)

A- On considère la fonction f définie sur l'ensemble IR des nombres réels par $f(x) = e^{2x}(e^x - 2)^2$.

1- a) Montrer que , pour tout réel x, $f'(x) = 4e^{2x}(e^x - 1)(e^x - 2)$.

b) Dresser le tableau de variations de f .

2- Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$ (*Unité* : $3\ cm$) .

B- On considère la fonction F définie sur IR par $F(x) = \dfrac{1}{12}(e^x - 2)^3(3e^x + 2)$.

1- Déterminer le signe de $F(x)$.

2- a) Montrer que F est la primitive de f sur IR telle que $F(\ell n 2) = 0$.

b) Dresser le tableau de variations F .

3- Soit (γ) la courbe représentative de F dans <u>le même repère orthonormé</u> que (C) .

a) Déterminer la position de (γ) par rapport à (C) et montrer que ces deux courbes sont tangentes en un point à déterminer .

b) Montrer que la droite d'équation $y = -\dfrac{4}{3}$ est asymptote à (γ) à $-\infty$.

c) Tracer la courbe (γ) dans le même repère que (C) .

4- Soit m un nombre réel tel que $m \le 0$. On considère le domaine (D) limité par (C) , l'axe des abscisses , et les droites d'équations $x = m$ et $x = \ell n 2$.

a) Calculer la mesure $S(m)$, en *unités d'aires* , de l'aire du domaine (D) en fonction de $F(m)$ et déterminer $\lim\limits_{m \to -\infty} S(m)$.

b) Montrer que , pour tout $m \in]-\infty\ ;\ 0]$, $\dfrac{5}{12} \le S(m) < \dfrac{4}{3}$.

c) a étant un nombre réel donné tel que $\dfrac{5}{12} \le a < \dfrac{4}{3}$, décrire la construction qui permet de trouver graphiquement le réel m tel que $S(m) = a$.

SOLUTION

Exercise 1 (points)

1- a) The equation $x^3-2x^2+xy^2+2y^2=0$ of (γ) is equivalent to $x^2(x-2)+y^2(x+2)=0$;
that is $y^2(2+x)=x^2(2-x)$ (1).
For $x=-2$, (1) becomes $0=16$ which is impossible .
For $x\neq-2$, (1) is equivalent to $y^2=\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)x^2$, which is defined for all real numbers x such that $\dfrac{2-x}{2+x}\geq 0$; that is $-2<x\leq 2$.
Finally , the set of abscissas of the points of (γ) is the interval $I=]-2\ ;\ 2]$.

b) An equation of the symmetric of (γ) with respect to the axis of abscissas is
$x^2(x-2)+(-y)^2(x+2)=0$ which is $x^2(x-2)+y^2(x+2)=0$, that of (γ).
Therefore , the axis of abscissas is an axis of symmetry of (γ) .

2- a) By symmetry with respect to the axis of abscissas, the required volume V is equal

$$\pi\int_0^2 y^2dx \text{ units of volume };$$

$$\int_0^2 y^2\,dx=\int_0^2\frac{-x^3+2x^2}{x+2}dx=\int_0^2\left(-x^2+4x-8+\frac{16}{x+2}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-8x+16\ell n(x+2)\right]_0^2.$$

$$=16(\ell n2-\frac{2}{3})\ ;\ \text{therefore } V=16(\ell n2-\frac{2}{3})\pi \text{ units of volume }.$$

b) If $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$, then 1 *unit of volume* = $8cm^3$;

Therefore $V=16\pi(\ell n2-\frac{2}{3})\pi\times 8=128(\ell n2-\frac{2}{3})\pi\ \ cm^3$.

Exercise 2 **(points)**

The triangle ABC is semi equilateral having $AB = 4$, $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$ and $(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ then $AC = 2AB = 8$ and $BC = \sqrt{3}\,AB = 4\sqrt{3}$.

I and E are the respective mid points of $[BC]$ and $[AC]$.

1- $S(A) = C$ and $S(C) = B$ where $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$ and $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{CB}) = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$, then $\frac{\sqrt{3}}{2}$ is the ratio of S and $-\frac{5\pi}{6}$ is an angle of S .

2- a) $AB = EC = 4$ and $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{EC}$, then there exists a rotation R that transforms A into E and B into C .

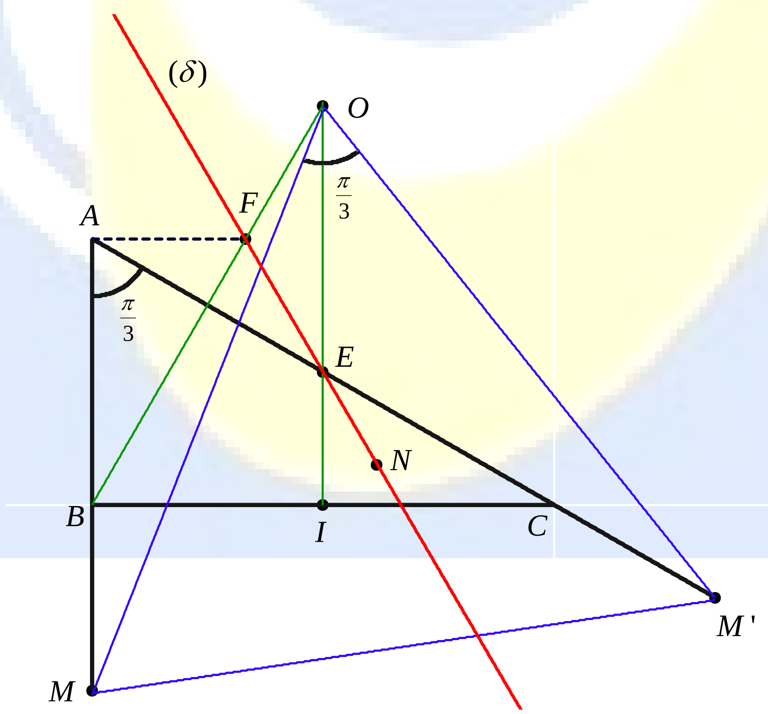
b) $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, then $\frac{\pi}{3}$ is an angle of R ; its center is the point O such that $OA = OE$ and $OB = OC$; it is the point of intersection O of the perpendicular bisector of $[AE]$ that passes through B (ABE is equilateral) and the perpendicular bisector of $[BC]$ that passes through E (BEC is isosceles at E).

3- a) $R \circ S(C) = R\big(S(C)\big) = R(B) = C$ and $S \circ R(B) = S\big(R(B)\big) = S(C) = B$.

b) $R \circ S = S(O\ ;1\ ;\frac{\pi}{3}) \circ S(.....\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}) = S(B\ ;\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2})$ and $S \circ R = S(C\ ;\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;-\frac{\pi}{2})$

4- $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{EM'} = k\,\overrightarrow{EC}$ where $R(A) = E$ and $R(B) = C$, then $M' = R(M)$.

$M' = R(M)$ where $R = r(O\ ;\frac{\pi}{3})$, then $OM = OM'$ and $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, then OMM' is a direct equilateral triangle .



5- (γ) is the circle of center N circumscribed about the triangle OMM' .

a) $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM}') = (\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, then $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AM}') = (\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM}')$ and A , O , M , M' are cyclic ; therefore the point A belongs to (γ) .

b) OMM' is a direct equilateral triangle , then N is its center of gravity ; therefore $(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ and $ON = \frac{\sqrt{3}}{3}OM$; therefore N is the image of M by the similitude f of center O , ratio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ and angle $\frac{\pi}{6}$.

c) $R(B) = C$, then OBC is a direct equilateral triangle .

E is on the perpendicular bisector (OI) of $[BC]$ and $EI = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}EB$, then E is the center of the circle circumscribed about OBC ; therefore $f(B) = E$.

$R(A) = E$, then OAE is a direct equilateral triangle ; therefore $f(A)$ is F , the center of the circle circumscribed about OAE .

d) As k traces IR , the point M , such that $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$, traces the straight line (AB) and its image N by f traces the straight line $f\big((AB)\big)$ which is (EF) since $f(A) = F$ and $f(B) = E$.

Therefore , the set (δ) of N as k traces IR is the straight line $(\delta) = (EF)$.

Drawing (δ) .

Exercise 3 **(points)**

1- a) $z' = z - 2 = x - 2 + iy$ and $z'' = z^2 - z = x^2 - y^2 + 2xyi - x - iy = x^2 - y^2 - x + y(2x-1)i$.

b) M' and M'' belong to $y'y$ if and only if $\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}(z'') = 0$; that is $x = 2$ and $x^2 - y^2 - x = 0$; $x = 2$ and $y^2 = 2$; therefore , M is one of the points with affixes $2 + \sqrt{2}i$ and $2 - \sqrt{2}i$.

2- a) $z' = z - 2 \neq z$ and $\dfrac{z'' - z}{z' - z} = \dfrac{z^2 - 2z}{z' - z} = \dfrac{x^2 - y^2 + 2xyi - 2x - 2yi}{-2} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2x}{-2} + y(1-x)i$.

b) $M' \neq M$, then the points M , M' and M'' are collinear if and only if $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ is real ; that is $(x-1)y = 0$; $x = 1$ or $y = 0$; therefore , the set of M is the union of the axis of abscissas and the straight line of equation $x = 1$.

c) M belongs to the circle of diameter $[M'M'']$ if and only if $\dfrac{z'' - z}{z' - z} = 0$ or $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ is pure imaginary ; that is $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z'' - z}{z' - z}\right) = 0$. Therefore , the set of M is the curve of equation $x^2 - y^2 - 2x = 0$.

3- (H) is the curve of equation $x^2 - y^2 - 2x = 0$.

a) An equation of (H) is $(x-1)^2 - y^2 = 1$, then (H) is a rectangular hyperbola of center $I(1\,;0)$.
The focal axis is the axis of abscissas and $a = 1$, then the vertices of (H) are O and $A(2\,;0)$.
The asymptotes of (H) are the straight lines of equations $y = x - 1$ and $y = -x + 1$.

b) $(\vec{u}\ ,\overrightarrow{OP}) = \theta\ \ (2\pi)$ then , the coordinates of P are $\alpha = OP\cos\theta$ and $\beta = OP\sin\theta$.
P is a point of (H) then , $\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 = 0$; that is $OP^2\cos^2\theta - 2OP\cos\theta - OP^2\sin^2\theta = 0$;
$OP\cos 2\theta = 2\cos\theta$ where $\cos 2\theta \neq 0$ since $0 \leq 2\theta < \dfrac{\pi}{2}$; therefore $OP = \dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}$.
$OP = 2\sqrt{3}$ if and only if $\dfrac{\cos\theta}{\cos 2\theta} = \sqrt{3}$; $\sqrt{3}(2\cos^2\theta - 1) = \cos\theta$; $2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3} = 0$;
Therefore , $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{4})$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *rad* .
When $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ *rad* , $\alpha = OP\cos\theta = 3$ and $\beta = OP\sin\theta = \sqrt{3}$.

Exercise 4 **(points)**

1- When we draw at random one die from the urn that contains 2 blue dice and one red ,

$p(B)=\frac{2}{3}$ and $p(R)=\frac{1}{3}$.

If a blue die is drawn and tossed then , the probability of getting a 6 is $p(S/B)=\frac{1}{6}$.

If the red die is drawn and tossed then , the probability of getting a 6 is $p(S/R)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Therefore , $p(S)=p(S\cap B)+p(S\cap R)=p(B)\times p(S/B)+p(R)\times p(S/R)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

2- a) The required probability is $p(S_n\cap B)=p(B)\times p(S_n/B)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n$

b) $p(S_n)=p(S_n\cap B)+p(S_n\cap R)=p(B)\times p(S_n/B)+p(R)\times p(S_n/R)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

For $n=1$, $p(S)=p(S_1)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

c) $$p_n=p(R/S_n)=\frac{p(R\cap S_n)}{p(S_n)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1} .$$

d) $p_n\geq 0.999$ is equivalent to $1000\geq 1998\left(\frac{1}{4}\right)^n+999$; $1\geq 1998\left(\frac{1}{4}\right)^n$; $4^n\geq 1998$; $n\geq\frac{\ell n1998}{\ell n4}\approx 5.48$.

Therefore , the least natural number $n\geq 1$ such that $p_n\geq 0.999$ is 6 .

<u>Exercise 5</u> (points)

1- $g(x) = x - 1 - 2\ell n\, x$.

a) $g(3) = 2 - 2\ell n 3$ and $g(4) = 3 - 2\ell n 4$ then $g(3) = 2 - 2\ell n 3 < 0 < g(4) = 3 - 2\ell n 4$

g is continuous and strictly increasing in $[\,2\,;+\infty[$, then the equation $g(x) = 0$ has a unique root α such that $3 < \alpha < 4$.

b) $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-x + 1 + 2\,\ell n\, x}{x^2} = -\dfrac{g(x)}{x^2}$.

For all x in $[4;+\infty[$, $\ell n\, x > 0$, then $f(x) > 0$.

For all x in $[4;+\infty[$, $g(x) > g(\alpha) = 0$, then $f(x) - \dfrac{1}{x} < 0$; $f(x) < \dfrac{1}{x}$.

Finally, for all x in $[4;+\infty[$, $0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$. (1)

2- The sequence (I_n) is defined, for $n \ge 1$, by $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

a) For all x in $[4;+\infty[$, $0 < f(x) < \dfrac{1}{x}$, then, for all natural numbers $n \ge 4$, $0 < I_n < \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ where

$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \left[\ell n |\,x\,|\right]_n^{n+1} = \ell n(n+1) - \ell n\ n = \ell n\left(\frac{n+1}{n}\right)$; therefore $0 < I_n < \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ell n\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ell n\, 1 = 0$ and $0 < I_n < \ell n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, then the limit of the sequence (I_n) is 0.

3- a) Let $u = 1 + 2\ell n\, x$ and $v' = \dfrac{1}{x^2}$, then $u' = \dfrac{2}{x}$ and $v = \dfrac{-1}{x}$.

Using integration by part, $\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{1 + 2\ell n\, x}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1 + 2\ell n\, x}{x} - \frac{2}{x} = -\frac{3 + 2\ell n\, x}{x}$.

b) $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots\cdots + I_n = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx + \cdots\cdots + \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$;

$$S_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \left[\frac{3 + 2\ell n\, x}{x}\right]_{n+1}^{1} = 3 - \frac{3}{n+1} - 2\frac{\ell n(n+1)}{n+1}.$$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ell n(n+1)}{n+1} = 0$, then $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$.

Exercise 6 **(points)**

A- 1- a) $f(x)=e^{2x}(e^x-2)^2$, then

$$f'(x)=2e^{2x}(e^x-2)^2+2e^{2x}(e^x-2)(e^x)=2e^{2x}(e^x-2)(e^x-2+e^x)=4e^{2x}(e^x-1)(e^x-2) .$$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ then , $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$ then

, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

The sign of $f'(x)$ is that of $(e^x-1)(e^x-2)$;

it changes at $x=0$ and at $x=\ell n2$.

Table of variations of f

x	$-\infty$		0		$\ell n2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 52

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ then , the axis of abscissas is asymptote to (C) at $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ and $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}e^x(e^x-2)^2=+\infty$ since $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ then , (C) has at $+\infty$ an asymptotic direction parallel to the axis of ordinates .

Drawing (C) . **(*Unit* : 3 *cm*) .**

B- 1- $F(x)=\dfrac{1}{12}(e^x-2)^3(3e^x+2)$, then $F(x)$ has the sign of e^x-2.

$F(\ell n2)=0$; if $x<\ell n2$, $F(x)<0$ and if $x>\ell n2$, $F(x)>0$.

2- a) $F'(x)=\dfrac{1}{4}(e^x-2)^2(e^x)(3e^x+2)+\dfrac{1}{12}(e^x-2)^3(3e^x)=\dfrac{1}{12}(e^x-2)^2(9e^{2x}+6e^x+3e^{2x}-6e^x)$

$=e^{2x}(e^x-2)^2=f(x)$, then F is the antiderivative of f on IR such that $F(\ell n2)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=-\dfrac{4}{3}$ and $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

$F'(x)=e^{2x}(e^x-2)^2\ge 0$

table of variations of F .

x	$-\infty$		$\ell n2$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$+$	
$F(x)$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

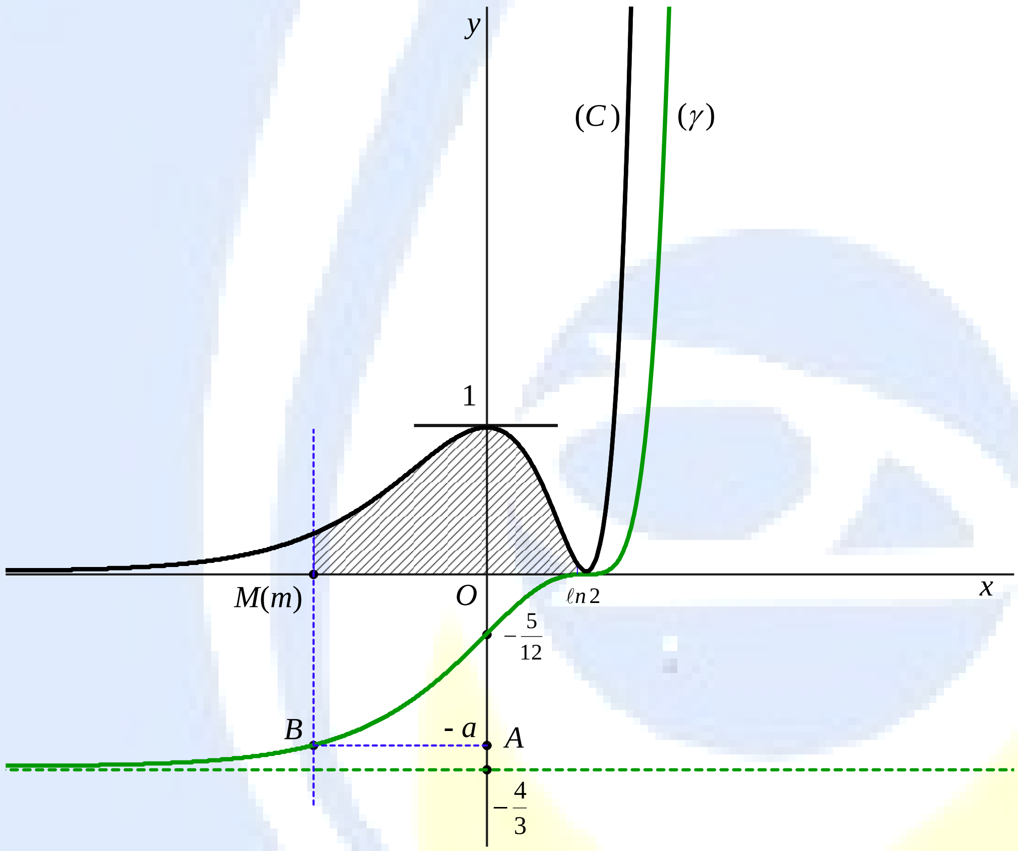
3- a) $f(x)-F(x)=e^{2x}(e^x-2)^2-\dfrac{1}{12}(e^x-2)^3(3e^x+2)=\dfrac{1}{12}(e^x-2)^2(12e^{2x}-3e^{2x}+4e^x+4)$

$f(x)-F(x)=\dfrac{1}{12}(e^x-2)^2(9e^{2x}+4e^x+4)\ge 0$, then (C) and (γ) have one common point $T(\ell n2\,;0)$ and , for all $x\ne\ell n2$, (C) lies above (γ) .

(C) and (γ) are tangent at T since $F'(\ell n2)=f'(\ell n2)$ (both are 0) .

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\frac{4}{3}$, then the straight line of equation $y = -\frac{4}{3}$ is asymptote to (γ) at $-\infty$.

c) Drawing (γ) .



4- Let m be a real number such that $m \le 0$.

a) f is a positive function then , $S(m) = \int_m^{\ell n 2} f(x)\,dx = -F(m)$.

$\lim_{m \to -\infty} S(m) = -\lim_{m \to -\infty} F(m) = \frac{4}{3}$.

b) F being strictly increasing , then For all $m \in]-\infty\,;0]$, $\lim_{m \to -\infty} F(m) < F(m) \le F(0)$; that is

$-\frac{4}{3} < F(m) \le -\frac{5}{12}$, then $\frac{5}{12} \le S(m) < \frac{4}{3}$.

c) a being a given number such that $\frac{5}{12} \leq a < \frac{4}{3}$, take the point A of ordinate $-a$ on the axis of ordinates ; the parallel to the axis of abscissas drawn through A cuts (γ) at a point B, then the parallel to the axis of ordinates drawn through B cuts the axis of abscissas at the point M such that $m = (abscissa\, of\ M) = -OM$.

LEBANESE UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2019 - 2020 | **Mathématiques** | **Durée : 3 heures**
La distribution des notes est sur 50 | **(Programme : Bac Français)** | **Juillet 2019**

Exercice 1 **(20 points)**

Le but de ce problème est de trouver une valeur approchée de la solution s *de l'équation :* $x\ln x = 1$.

Partie A

L'objet de cette partie est de prouver l'existence et l'unicité de s.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(x) = -1 + x\ln x \quad si \quad x > 0 \end{cases}$

1- f est-elle continue en 0 ? f est-elle dérivable en 0 ? (justifier les réponses).

2- a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique s, vérifiant $1{,}5 < s < 2$ (on ne cherchera pas à calculer s).

3- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unité 5 cm ; on appelle (C) la courbe représentative de f dans ce repère.

a) Tracer (C).

b) Soit H la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $H(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

Calculer $H'(x)$. En déduire une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$.

c) Calculer alors $\displaystyle\int_1^s -f(x)dx$ et exprimer le résultat sous forme d'un polynôme du second degré en s.

d) Déduire en fonction de s, l'aire en cm^2 de la partie du plan définie par $1 \le x \le s$ et $0 \le y \le -f(x)$.

Partie B

Soit x_0 un réel tel que $x_0 > \dfrac{1}{e}$ et M_0 le point ayant pour coordonnées $(x_0\,;\, f(x_0))$.

1- Déterminer une équation de la tangente T_0 à (C) en M_0 et déterminer , en fonction de x_0, l'abscisse x_1 du point d'intersection de T_0 avec l'axe des abscisses .

2- Soit I l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,2\right]$ et g la fonction définie sur I par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+\ln x}$.

a) Vérifier que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$.

b) A l'aide du tableau de variations de f , montrer que si x appartient à I alors $|f(x)| \leq 0{,}4$.

c) Sachant que si x appartient à I , $x(1+\ln x)^2 \geq \frac{8}{3}$, montrer alors que $|g'(x)| \leq 0{,}15$.

3- a) Démontrer que si x appartient à I , l'équation $g(x) = x$ équivaut à $f(x) = 0$; en déduire que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique .

b) Étudier les variations de g sur l'intervalle I .

c) Montrer que si x appartient à I alors $g(x)$ appartient à I . (On rappelle que $1{,}5 < s < 2$) .

Partie C

Dans cette partie on se propose d'étudier une suite convergeant vers s .
On définit la suite numérique (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1- Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2} ; 2\right]$.

2- On admet la propriété suivante (appelée inégalité des accroissements finis):
« Si h est définie sur un intervalle J et si pour tout x de J on a $|h'(x)| \leq M$, alors pour tous réels a et b de J on a : $|h(b) - h(a)| \leq M|b-a|$ ».

a) En s'aidant de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :
Pour tout entier naturel n , $|g(u_n) - g(s)| \leq 0{,}15 \times |u_n - s|$.

b) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n,

$$|u_n - s| \leq (0{,}15)^n \times \frac{1}{2}.$$

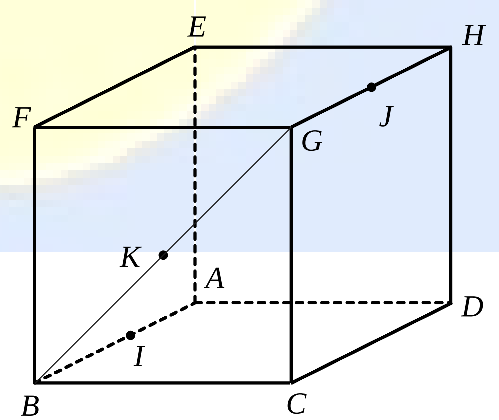
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente de limite s.

3- a) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : si $n \geq n_0$, alors $|u_n - s| \leq 10^{-3}$.

b) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de s .

Exercice 2 (9 points)

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1 cm ; I , J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[GH]$ et $[BG]$.
Les calculs seront effectués dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1- a) Démontrer que le quadrilatère $DIFJ$ est un parallélogramme.
Établir que $DIFJ$ est en fait un losange et montrer que

l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}\ cm^2$.

b) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\,(2\ ,1\ ,-1)$ est un vecteur normal au plan (DIJ).
En déduire une équation cartésienne de ce plan.

2- Soit Δ la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ).

a) Donner une représentation paramétrique de Δ et prouver que K est un point de Δ.

b) Trouver les coordonnées du point L projeté orthogonal de E sur le plan (DIJ) et vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.

c) Calculer la distance du point E au plan (DIJ) ainsi que le volume de la pyramide $EDIFJ$ de sommet E .

Exercice 3 **(5 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = \frac{x^2(2-x)}{x+2}$.

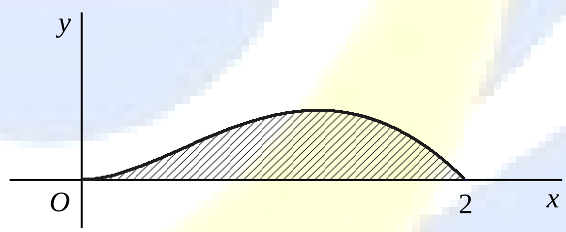
Soit (γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.

1- a) Vérifier que $f(x) = -x^2 + 4x - 8 + \frac{16}{x+2}$ et calculer sa dérivée $f\,'(x)$.

b) Démontrer que (γ) est tangente à l'axe des abscisses en O.

c) Déterminer la position de (γ) par rapport à l'axe des abscisses .

2- La figure ci-contre montre la partie de (γ) dans l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
Calculer l'aire de la partie hachurée du plan .



Exercice 4 **(7 points)**

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et une pièce dont on distingue les côtés pile (P) et face (F).

A chaque lancer, on associe le nombre complexe $z = \rho e^{\frac{n\pi}{6}i}$ défini de la manière suivante :

- $\rho = 1$ si face (F) apparaît sur la pièce et $\rho = 2$ si pile (P) apparaît sur la pièce,
- n est l'entier naturel lu sur la face supérieure du dé.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (*unité 2 cm*) , on note M le point d'affixe z .
Soit Y l'ordonnée de M .

1- *On suppose dans cette partie que la pièce et le dé ne sont pas truqués.*

a) Déterminer l'ensemble des points M que l'on peut obtenir et placer ces points dans le repère.
(Les points obtenus seront notés A_n pour $\rho = 1$ et B_n pour $\rho = 2$, n étant l'entier lu sur le dé).

b) Quelle est la probabilité de l'évènement Y = 1 ?

c) Déterminer la probabilité de l'évènement $\rho = 1$ sachant que Y = 1 .

2- *On suppose dans cette partie que le dé n'est pas truqué et la pièce est pipée de manière que la probabilité d'obtenir face* (F) *soit le double de celle d'obtenir pile* (P).

a) Calculer les probabilités des événements $\rho = 1$ et $\rho = 2$.

b) Montrer que la probabilité d'obtenir Y = 1 est $\frac{2}{9}$.

c) On répète dix fois l'épreuve, les répétitions étant indépendantes, quelle est la probabilité d'obtenir trois points M d'ordonnée Y=1 ?

Exercice 5 **(9 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z , on associe les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' telles que $z' = z - 2$ et $z'' = z^2 - z$.

1- Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux nombres réels .

a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z' et z'' en fonction de x et y .

b) Déterminer les points M pour lesquels les points M' et M'' appartiennent à l'axe des ordonnées .

2- a) Vérifier que $\overrightarrow{MM'} = -2\vec{u}$ et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM''}$ en fonction de x et y .

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels les points M , M' et M'' sont alignés .

c) Déterminer l'ensemble des points M qui appartiennent au cercle de diamètre $[M'M'']$.

3- Soit (H) la courbe d'équation $x^2 - y^2 - 2x = 0$.

$P(\alpha\,;\,\beta)$ est un point de (H) tel que $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OP}) = \theta \;\; (2\pi)$ où $0 \le \theta < \frac{\pi}{4}$.

Montrer que $OP = \frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}$. Déterminer θ , α et β lorsque $OP = 2\sqrt{3}$.

LEBANESE UNIVERSITY
FACULTY OF ENGINEERING

الجامعة اللبنانية
كلية الهندسة

Concours d'entrée 2019 - 2020 **Solution de Mathématiques** ***juillet 2019***

Bac. Français

Exercice 1 (points)

Partie A

1- $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$, par suite *f* est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to o} \ln x = -\infty$, alors *f* n'est pas dérivable en 0.

2- a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = \ln x + 1$ d'où le tableau de variations de *f* :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Pour *x* appartenant à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{e}\right[$, $f(x) < 0$

l'équation $f(x) = 0$ est impossible .

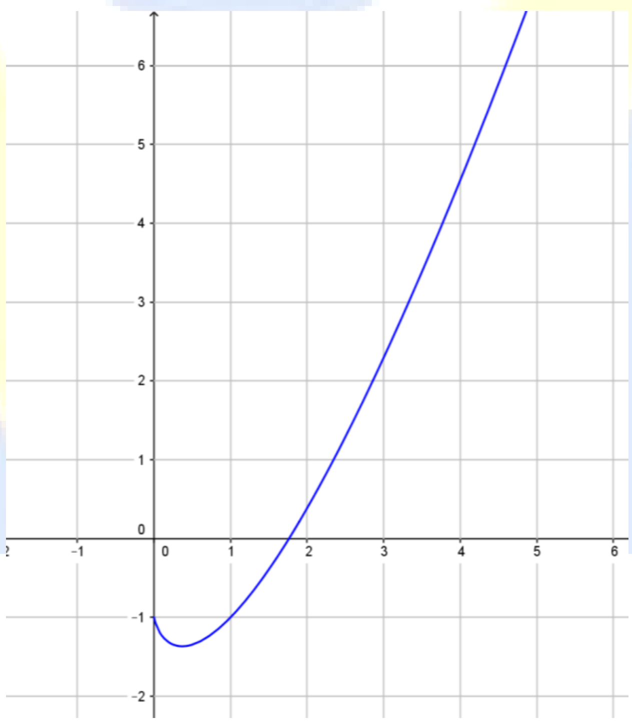
Pour *x* appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$, $f(x) \in \left[-1-\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$, f est continue et strictement monotone, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique *s*.

Par suite, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique *s* sur $[0\ ;\ +\infty[$

D'autre part $f(1,5)\times f(2) < 0$ alors $1,5 < s < 2$.

3- a) Quelques points particuliers :

$f(1) = -1$; $f(1,5) = -0,39$; $f(2) = 0,39$



b) $H'(x) = x\ln x$

$f(x) = -1 + H'(x)$ alors $F(x) = -x + H(x)$

c) $\displaystyle\int_1^s - f(x)dx = [-F(x)]_1^s = F(1) - F(s)$

$$= \left(-1-\frac{1}{4}\right) - \left(-s + \frac{s^2}{2}\ln s - \frac{s^2}{4}\right)$$

Or $f(s) = 0$ alors $\ln s = \dfrac{1}{s}$, d'où

$\displaystyle\int_1^s - f(x)dx = \frac{s^2}{4} + \frac{s}{2} - \frac{5}{4}$.

d) l'aire du domaine est $\left(\frac{s^2}{4}+\frac{s}{2}-\frac{5}{4}\right)\times 25cm^2$

Partie B

Soit M_0 le point ayant pour coordonnées $(x_0\,;\,f(x_0))$.

1- Equation de T_0 : $y=(\ln x_0+1)x-x_0-1$.

Pour $y = 0$, $x_1=\frac{1+x_0}{1+\ln x_0}$.

2- a) $g'(x)=\frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$.

b) Comme f est croissante sur $\left[\frac{3}{2}\,;\,2\right]$, $f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(x)\le f(2)$

Or $f\left(\frac{3}{2}\right)\approx -0{,}39$ et $f(2)\approx 0{,}38$, alors $-0{,}4< f\left(\frac{3}{2}\right)\le f(x)\le f(2)\le -f\left(\frac{3}{2}\right)<0{,}4$

Ainsi , pour x appartient à I ,$|\,f(x)\,|\le 0.4$.

c) Si pour tout x appartenant à I , $x(1+\ln x)^2\ge\frac{8}{3}$ alors $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}\le\frac{3}{8}$.

Or $|\,f(x)\,|\le 0.4$ donc $|\,g'(x)|=\frac{|\,f(x)\,|}{x(1+\ln x)^2}\le 0{,}4\times\frac{3}{8}$, soit $|\,g'(x)|\le 0{,}15$.

3- a) $g(x)=x\Leftrightarrow\frac{1+x}{1+\ln x}=x\Leftrightarrow 1+x=x+x\ln x\Leftrightarrow 1=x\ln x\Leftrightarrow f(x)=0$, alors l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique s .

b) $g'(x)=\frac{x\ln x-1}{x(1+\ln x)^2}=\frac{f(x)}{x(1+\ln x)^2}$.

x	$\frac{3}{2}$		s		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\searrow$		s	$\nearrow$	

c) $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2{,}5}{1+\ln(2{,}5)}=1{,}3$ et $g(2)=\frac{3}{1+\ln(3)}=1{,}42$. Donc $g(x)\in[s\,;\,1{,}42]\subset I$.

Partie C

La suite numérique (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1- $u_0 = 2$ donc $u_0 \in I$

Si , pour un certain n , $u_n \in I$ alors $g(u_n) \in I$ d'après B.3.c, donc $u_{n+1} \in I$

Par suite, pour tout entier naturel n, $u_n \in I$

2- a) Pour tout x de I on a $|g'(x)| \leq 0{,}15$ alors en appliquant l'inégalité des accroissements finis pour $a = u_n$ et $b = s$, on trouve que , pour tout n , $|g(u_n) - g(s)| \leq 0{,}15 \times |u_n - s|$.

b) $|u_0 - s| \leq |2 - s| \leq \frac{1}{2} \leq (0{,}15)^0 \times \frac{1}{2}$.

Si $|u_n - s| \leq (0{,}15)^n \times \frac{1}{2}$ alors $|g(u_n) - g(s)| \leq 0{,}15 \times |u_n - s|$

Or $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(s) = s$ donc $|u_{n+1} - s| \leq 0{,}15 \times |u_n - s| \leq 0{,}15 \times (0{,}15)^n \times \frac{1}{2} = (0{,}15)^{n+1} \times \frac{1}{2}$.

Par suite, pour tout entier naturel n, $|u_n - s| \leq (0{,}15)^n \times \frac{1}{2}$.

c) $-1 < 0{,}15 < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}15)^n = 0$ par suite $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - s| = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = s$.

3-a) Pour que $|u_n - s| \leq 10^{-3}$, il suffit d'avoir $(0{,}15)^n \times \frac{1}{2} \leq 10^{-3}$; $(0{,}15)^n \leq 0{,}002$; $n \times \ln(0{,}15) \leq \ln(0{,}002)$

$n \geq 3{,}27$ donc $n_0 = 4$

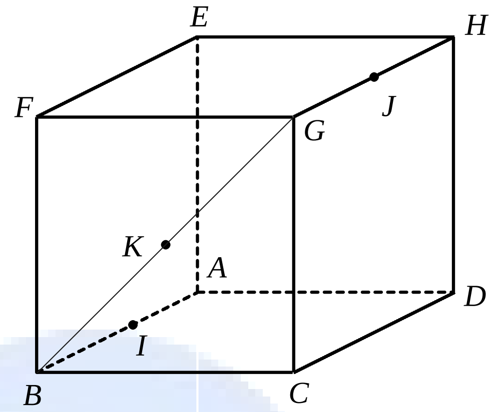
Si $n \geq 4$, alors $|u_n - s| \leq 10^{-3}$.

b) Une valeur approchée de s est u_4

A l'aide de la calculatrice, $u_1 = 1{,}772$; $u_2 = 1.763$; $u_3 = 1.763$; $u_4 = 1{,}763$.

Donc une valeur approchée de s est $1{,}76322$.

Exercice 2 **(points)**



1- a) Dans le repère , $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\,)$: .

$B(1\,;0\,;0)$, alors $I(\frac{1}{2}\,;0\,;0)$.

$H(0\,;1\,;1)$ et $G(1\,;1\,;1)$, alors $J(\frac{1}{2}\,;1\,;1)$.

$D(0\,;1\,;0)$ et $F(1\,;0\,;1)$;

$\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$ et $\overrightarrow{JF}\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$, alors $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{JF}$

et $DIFJ$ est un parallélogramme.

D'autre part $\overrightarrow{IF}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;1\right)$ donc $IF=\sqrt{\frac{5}{4}}=ID$; $DIFJ$ est un losange.

$\overrightarrow{DF}(1\,;-1\,;1)$ et $\overrightarrow{IJ}(0\,;1\,;1)$, alors l'aire du losange est $= S=\frac{1}{2}\times DF\times IJ=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ cm^2$.

b) $\vec{n}\ (2\,,1\,,-1)$, $\overrightarrow{DI}\left(\frac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\ (0\,;1\,;1)$;

$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{DI}=\vec{n}\,.\,\overrightarrow{IJ}=0$ alors $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (DIJ).

Une équation cartésienne du plan (DIJ) est $2x+y-z-1=0$.

2- a) Δ passe par E et de vecteur directeur $\vec{n}$; une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases}$ $t\in R$.

$K\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ est le point de Δ correspondant a $t=\frac{1}{2}$.

b) $2(2t)+t-(-t+1)-1=0$ donne $t=\frac{1}{3}$ alors le point d'intersection de Δ et de (DIJ) est $L\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

On vérifie que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OL}$.

c) La distance de E au plan (DIJ) est EL = $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Le volume de la pyramide est $V=\frac{1}{3}\times aire\ base\times hauteur=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}$ *unités de volume.*

Exercice 3 (points)

1- a) $-x^2+4x-8+\dfrac{16}{x+2}=\dfrac{-x^3-2x^2+4x^2+8x-8x-16+16}{x+2}=\dfrac{-x^3+2x^2}{x+2}=f(x)$;

$$f'(x)=-2x^2+4-\frac{16}{(x+2)^2}\ .$$

b) $f(0)=f'(0)=0$ alors (γ) est tangente à l'axe des abscisses en O.

c) $f(0)=f(2)=0$ et , pour tout $x\in I-\{0\ ;\ 2\}$, le signe de $f(x)$ est celui du polynôme $(2-x)(x+2)$ alors $f(x)>0$.

Tous les points de (γ) autres que O et $(2\ ;\ 0)$ sont situés au dessus de l'axe des abscisses.

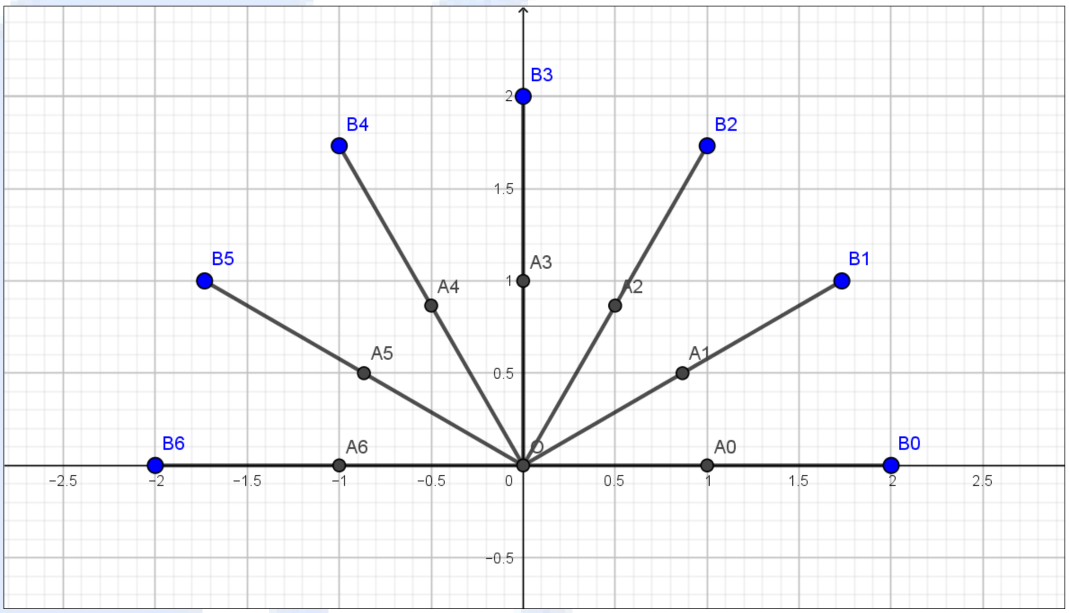
2- Pour tout $x\in[0\ ;\ 2]$, $f(x)\geq 0$ alors l'aire A du domaine hachuré est $A=\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ *unités d'aire* .

$$A=\int_0^2\left(-x^2+4x-8+\frac{16}{x+2}\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-8x+16\ell n(x+2)\right]_0^2=16(\ell n2-\frac{2}{3})\ \textit{unités d'aire}\ .$$

Exercice 4 **(points)**

1- La pièce et le dé ne sont pas truqués.

a) On obtient deux séries de points : les points A_k d'affixe $a_k = e^{\frac{ik\pi}{6}}$ et les points B_k d'affixe $b_k = 2e^{\frac{ik\pi}{6}}$.



b) Les points ayant pour ordonnée 1 : A_3 , B_1 et B_5

Comme le lancer de la pièce et celui du dé sont indépendants, et comme il y a équiprobabilité

P(Y =1) = $P(\rho=1)\times P(k = 3) + P(\rho = 2)\times P(k = 1 \text{ou } K = 5) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{6} = \frac{1}{4}$.

Ou Il y a 12 points possibles tous équiprobables parmi lesquels 3 sont favorables , alors $P(Y = 1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

c) Le point associé a $(\rho = 1 \;\; et \;\; Y = 1)$ est le point A_3 alors la probabilité demandée est égale a $\frac{1}{3}$

2- La pièce est pipée et le dé n'est pas truqué.

a) $P(\rho=1) = 2\,P(\rho=2)$ alors $3\,P(\rho=2) = 1$, d'où $P(\rho=2) = \frac{1}{3}$ et $P(\rho=1) = \frac{2}{3}$.

b) $P(Y = 1) = P(\rho=1)\times P(k = 3) + P(\rho=2)\times P(k = 1 \text{ ou } k = 5) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{6} = \frac{2}{9}$.

c) Un lancer de la pièce et du dé est une épreuve de Bernoulli : le succès est obtenir un point M tel que Y = 1, de probabilité p = $\frac{2}{9}$

En répétant l'épreuve 10 fois de façon indépendante, on obtient un schéma de Bernoulli d'ordre 10.

Si X désigne le nombre de succès, X suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et p = $\frac{2}{9}$,

P(X = 3) = $\binom{10}{3}\left(\frac{2}{9}\right)^3\left(\frac{7}{9}\right)^7 = 0{,}227$.

Exercice 5 **(points)**

1- a) $z' = z - 2 = x - 2 + iy$ et $z'' = z^2 - z = x^2 - y^2 + 2xyi - x - iy = x^2 - y^2 - x + y(2x-1)i$.

b) M' et M'' appartiennent à l'axe $y'y$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z') = \mathrm{Re}(z'') = 0$; d'où $x = 2$ et $x^2 - y^2 - x = 0$; $x = 2$ et $y^2 = 2$. Par suite M est l'un des points d'affixes respectives $2 + \sqrt{2}i$ and $2 - \sqrt{2}i$.

2- a) $z' - z = -2$, alors $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{u}$.

$z'' - z = z^2 - 2z = x^2 - y^2 + 2xyi - 2x - 2yi = x^2 - y^2 - 2x + 2(x-1)yi$, alors les coordonnées de $\overrightarrow{MM''}$ sont $X = x^2 - y^2 - 2x$ et $Y = 2(x-1)y$.

b) Puisque $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{u}$, les points M , M' et M'' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MM''}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires c'est à dire si et seulement si $Y = 0$; $(x-1)y = 0$; $x = 1$ ou $y = 0$.

L'ensemble des points M tels que M , M' et M'' soient alignés , est la réunion de l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

c) M appartient au cercle de diamètre $[M'M'']$ si et seulement si $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MM''} = 0$ d'où $-2X = 0$; $x^2 - y^2 - 2x = 0$.

L'ensemble des points M tels que M appartienne au cercle de diamètre $[M'M'']$ est la courbe d'équation $x^2 - y^2 - 2x = 0$

3- $P(\alpha\ ;\ \beta)$ est un point de (H), alors $\alpha^2 - 2\alpha - \beta^2 = 0$ d'où $OP^2\cos^2\theta - 2OP\cos\theta - OP^2\sin^2\theta = 0$;

$OP\cos 2\theta = 2\cos\theta$ avec $\cos 2\theta \neq 0$ puisque $0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2}$, alors $OP = \frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}$.

$OP = 2\sqrt{3}$ si et seulement si $\frac{\cos\theta}{\cos 2\theta} = \sqrt{3}$; $\sqrt{3}(2\cos^2\theta - 1) = \cos\theta$; $2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3} = 0$;

alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4})$; $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad .

lorsque $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad , $\alpha = OP\cos\theta = 3$ et $\beta = OP\sin\theta = \sqrt{3}$.